

Cálculo Diferencial II, MT0639

Escuela de Economía, Universidad de Guanajuato

Lista de Problemas II

1. Demuestra que si $f(x, y) = (ax + by)^2$, con $a, b \in \mathbb{R}$, entonces

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2f(x, y).$$

2. Calcula $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, y $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$ para las siguientes funciones:

$$(a) f(x, y) := x^7 + y^7; \quad (b) f(x, y) := x^5 \ln y; \quad (c) f(x, y) := (x^2 - 2y^2)^5.$$

3. Aproxima linealmente la función $f(x, y) := x^2 + 2xy + 2y^2$ alrededor del punto $(x_0, y_0) = (1, 1)$. Escribe la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 5)$.

4. Considera una función $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de la que sabemos que $F(0, 0) = 0$, que $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \geq 2$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, y que $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \leq 1$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. ¿Qué podemos decir de los tamaños relativos de $F(0, 0)$, $F(1, 0)$, $F(2, 0)$, $F(0, 1)$, y $F(1, 1)$? Escribe las desigualdades que se deben cumplir entre dichos números.

5. Sea la siguiente función de producción $F(K, L) := AK^\alpha L^\beta e^{\gamma K/L}$, donde $A, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Calcula las productividades marginales de ambos inputs, e indica para qué conjunto de valores de A, α, β, γ , y de los factores K, L , dichas productividades son positivas.

6. Calcula $Df(x, y)$ y $D^2f(x, y)$ para las funciones:

$$(a) f(x, y) := 4x^2y - 3xy^3 + 6x; \quad (b) f(x, y) := xy; \quad (c) f(x, y) := xy^2;$$
$$(d) f(x, y) := e^{2x+3y}; \quad (e) f(x, y) := \frac{x+y}{x-y}; \quad (f) f(x, y) := 3x^2y - 7x\sqrt{y}.$$

7. Sea la función de demanda de dos bienes, bien 1 y bien 2, por parte de cierto consumidor $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $Q(p_1, p_2, y) = (q_1(p_1, p_2, y), q_2(p_1, p_2, y))$ donde

$$q_1(p_1, p_2, y) := 6p_1^{-2}p_2^{3/2}y, \quad \text{y} \quad q_2(p_1, p_2, y) := 4p_1p_2^{-1}y^2,$$

siendo p_1 el precio del bien 1, p_2 el precio del bien 2, e y la renta del consumidor. Calcula dq_1 , dq_2 , $DQ(p_1, p_2, y)$, y $DQ(1, 2, 10)$.