Cálculo Diferencial II, MT0639

Escuela de Economía, Universidad de Guanajuato

Lista de Problemas I

1. Para cada uno de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, (a) dibuja el conjunto, (b) obtén (gráfica y analíticamente) (b1) el conjunto de sus puntos interiores, (b2) su clausura, (b3) el conjunto de sus puntos frontera, e (c) indica si es abierto y/o cerrado o ninguno de ambos.

$$\begin{aligned}
A = &\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 16, \sqrt{x^2 + y^2} > 2\right\} \\
&\cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = 5, -2 < x < 2\right\} \cup \{(1, 1)\}\,; \\
B = &\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 16, \sqrt{x^2 + y^2} \geq 2\right\} \\
&\cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = 5, -2 \leq x \leq 2\right\} \cup \{(1, 1)\}\,; \\
C = &\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0, y > 0, x^2 + y^2 < 16, \sqrt{x^2 + y^2} > 2\right\} \\
&\cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = 5, -2 < x < 2\right\} \cup \{(1, 1)\}\,; \\
D = &\; C \setminus \{(1, 1)\}\,; \\
E = &\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = 0 \text{ ó } y = 0 \right\}
\end{aligned}$$

2. Argumenta si un conjunto finito es abierto o cerrado. (Aclaración: *un conjunto finito es un conjunto con un número finito de elementos*).

3. Argumenta si el conjunto de los números enteros, $\mathbb{Z}$, es abierto o cerrado.

4. Para cada una de las siguientes funciones, calcula (a) su dominio y su imagen, (b) indica cuáles son (b1) inyectivas (one-to-one), (b2) sobreyectivas (onto), y (c) escribe la expresión de su función inversa.

$$\begin{aligned}
&f(x) = x + 1; \quad g(x) = x^2 + 1; \\
&m(x) = 1/x; \quad n(x) = \mathrm{e}^{-x}; \quad q(x) = \sqrt{x - 1}.
\end{aligned}$$

5. Considera que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función contínua y que $f(x^*) > 0$ para algún $x^* \in \mathbb{R}^n$. Demuestra que existe una bola $B(x^*, \epsilon)$, $\epsilon > 0$, tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in B(x^*, \epsilon)$. (Consejo: haz primero un razonamiento gráfico tomando $n = 1$)

6. Demuestra el siguiente Teorema. (Consejo: haz primero un razonamiento gráfico tomando una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$).

TEOREMA: *Sea una función $f : A \to B$, sean U_1, U_2 subconjuntos arbitrarios de A, y sean V_1, V_2 subconjuntos arbitrarios de B, entonces:*
(a) si $U_1 \subseteq U_2$ entonces $f(U_1) \subseteq f(U_2)$,
(b) si $V_1 \subseteq V_2$ entonces $f^{-1}(V_1) \subseteq f^{-1}(V_2)$.

7. Demuestra que para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ se cumple

$$(a)\quad 2\left\|x\right\|^2 + 2\left\|y\right\|^2 = \left\|x+y\right\|^2 + \left\|x-y\right\|^2,$$

$$(b)\quad 4x \cdot y = 4\langle x, y\rangle = \left\|x+y\right\|^2 - \left\|x-y\right\|^2.$$

8. Para las siguientes funciones, (a) determina su conjunto de curvas de nivel, y (b) dibuja un subconjunto de las mismas.

$$f(x,y) = x^2 + y^2; \quad g(x,y) = x + y^2; \quad h(x,y) = x^2;$$

$$m(x,y) = xy; \quad n(x,y) = \mathrm{e}^{x+y}; \quad q(x,y) = \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{2}\ln y.$$

10. Determina los valores para los cuáles las siguientes funciones son contínuas.

$$f(x,y) = x^5 y + 4x + y; \quad g(x,y) = \frac{x}{1-x+y}; \quad h(x,y) = |xy| + \frac{1}{|x|}.$$

11. Considera que f y g son ambas funciones de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$, y que ambas son contínuas en un punto $x^* \in \mathbb{R}^n$. Demuestra que si $g(x^*) \neq 0$ entonces la función $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definida por $h(x) := f(x)/g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, está bien definida y es contínua en el punto x^*.